Aufgaben zur Abstrakten harmonischen Analysis

Blatt 1
SS 2016
Abgabe: 14.04.16 17:00 Uhr in der Vorlesung

Søren Knudby
Sven Raum

Aufgabe 1 [4 Punkte].
Zeigen Sie, dass die folgenden Gruppen mit der angegebenen Topologie topologische Gruppen sind.

(i) $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Ordnungstopologie.

(ii) S^1 mit der Topologie, mit der gewöhnlichen Topologie, die von der Einbettung $\mathrm{S}^1 \subset \mathbb{C}$ induziert wird.

(iii) Die Gruppen $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit der Topologie, die durch die Einbettungen $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ und $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ induziert wird.

(iv) Die Gruppen $\mathcal{O}(n)$ und $\mathcal{U}(n)$ der orthogonalen beziehungsweise unitären Matrizen mit der Topologie der Punktweisen konvergenz. Für $\mathcal{O}(n)$ ist diese Topologie durch die Vorschrift $g_i \to g$ genau dann wenn $g_i\xi \to g\xi$ für alle Vektoren $\xi \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Eine ähnliche Beschreibung definiert die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathcal{U}(n)$.

Aufgabe 2 [4 Punkte].

Zeigen Sie, dass das Interval $[0, 1]$ nicht der unterliegende topologische Raum einer topologischen Gruppe ist.

Aufgabe 3 [4 Punkte].

Sei G eine topologische Gruppe mit einem Normalteiler $N \trianglelefteq G$. Zeigen Sie, dass der quotient G/N Hausdorff ist genau dann wenn N abgeschlossen in G ist.

Aufgabe 4 [4 Punkte].

Konstruieren sie einen nicht-trivialen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dieser nicht stetig sein kann.