Aufgaben zur Abstrakten harmonischen Analysis

Blatt 10
SS 2016
Abgabe: 30.06.16 14:15 Uhr in der Übungsgruppe

Søren Knudby
Sven Raum

Aufgabe 1 [4 Punkte].
Sei G lokal kompakte abelsche Gruppe. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz. G ist genau dann kompakt, wenn $\hat{G}$ diskret ist.

Aufgabe 2 [4 Punkte].

Zeigen Sie: eine lokal kompakte abelsche Gruppe G ist genau dann abzählbar zweiter Art, wenn ihr Pontryagin Duales $\hat{G}$ abzählbar zweiter Art ist.
Hinweis: benutzen Sie zum Beispiel Aufgabe 3 von Blatt 10.

Aufgabe 3 [4 Punkte].

Sei G lokal kompakte abelsche Gruppe und $\mathcal{F} : \mathrm{L}^2(G) \to \mathrm{L}^2(\hat{G})$ die unitäre Fortsetzung der Fouriertransformation. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F} f \mathcal{F}^* = \mathrm{m}_{\hat{f}}$ für jedes $f \in \mathrm{C}^*(G)$ gilt. Hierbei bezeichnet, $\mathrm{m}_{\hat{f}}$ den Multiplikationsoperator mit $\hat{f} \in \mathrm{C}_0(\hat{G})$. Folgern Sie, dass insbesondere $\mathcal{F}\mathrm{C}^*(G)\mathcal{F}^* = \mathrm{C}_0(\hat{G})$ gilt.

Aufgabe 4 [4 Punkte].

Sei $b : \mathbb{R} \to \prod_{t \in \mathbb{R}} \mathrm{S}^1$ die Abbildung $b(x)_t = \mathrm{e}^{2\pi i x t}$. Sei $B = \overline{b(\mathbb{R})} \subset \prod_{t \in \mathbb{R}} \mathrm{S}^1$. Zeigen Sie, dass B eine kompakte separable Gruppe ist, die nicht abzählbar zweiter Art ist.
Hinweis: zeigen Sie, dass $B = \hat{\mathbb{R}}_{\mathrm{disc}}$, wobei $\mathbb{R}_{\mathrm{disc}}$ die Gruppe $\mathbb{R}$ mit der diskrete Topologie ist. Wenden Sie dann das Resultat der Aufgabe 2 an.