Aufgaben zur Abstrakten harmonischen Analysis

Blatt 13
SS 2016
Abgabe: 14.07.16 14:15 Uhr in der Übungsgruppe

Søren Knudby
Sven Raum

Aufgabe 1 [4 Punkte].
Zeigen Sie, dass eine abzählbare lokal kompakte Gruppe diskret ist.

Aufgabe 2 [4 Punkte].

Sei G eine diskrete Gruppe und $\varphi : G \to \mathbb{C}$ die Function $\varphi(g) = \delta_{g,e}$.

(i) Zeigen Sie, dass φ eine Funktion positiven Typs auf G ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die linksreguläre Darstellung $(\lambda, \ell^2(G), \delta_e)$ die GNS-Darstellung von G bezüglich φ ist.

Aufgabe 3 [4 Punkte].

Sei $\chi_n : \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$ der Character gegeben durch $\chi_n(\lambda) = \lambda^n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- $\chi_n \in \mathcal{P}_1(\mathrm{S}^1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $\chi_n \to 0$ in der Schwach-*-Topologie auf $\mathcal{P}_{\leq 1} \subset \mathrm{L}^\infty(\mathrm{S}^1)$.

Folgern Sie, dass die Schwach-*-Topologie und die Topologie gleichmäßiger Konvergenz auf $\mathcal{P}_{\leq 1}(\mathrm{S}^1)$ nicht übereinstimmen.

Aufgabe 4 [4 Punkte].

Sei G eine topologische Gruppe und $\varphi : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion positiven Typs. Zeigen Sie, dass $H = \{g \in G \,|\, \varphi(g) = \varphi(e)\} \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe ist und φ konstant auf jeder Doppelnebenklasse $HgH \subset G$ ist.