Aufgaben zur Abstrakten harmonischen Analysis

Blatt 2
SS 2016
Abgabe: 21.04.16 14:15 Uhr in der Übungsgruppe

Søren Knudby
Sven Raum

Aufgabe 1 [4 Punkte].
Finden Sie abgeschlossene Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$, so dass die Summe $A + B$ nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 [4 Punkte].

Ein topologischer Raum heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung dieses Raumes eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Beweisen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann kompakt ist, wenn jedes Netz in X ein konvergentes Teilnetz besitzt.

Hinweis: betrachten Sie Ihre Mitschriften der Analysis II und übertragen Sie den Beweis für "Folgenkompaktheit $\Leftrightarrow$ Kompaktheit", der für metrische Räume gegeben wurde, in den Kontext beliebiger topologischer Räume.

Aufgabe 3 [4 Punkte].

(i) Seien X, Y topologische Räume und $\sim_X$ bzw. $\sim_Y$ Äquivalenzrelationen auf X bzw. Y. Sei $\sim$ das Produkt von $\sim_X$ und $\sim_Y$, das durch $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 \sim_X x_2 \wedge y_1 \sim_Y y_2)$ definiert ist. Nehmen Sie an, dass die Quotientenabbildungen $X \to X/\sim$ und $Y \to Y/\sim$ offen sind. Zeigen Sie, dass es einen natürlichen Homeomorphismus $(X/\sim_X) \times (Y/\sim_Y) \cong (X \times Y)/\sim$ gibt.

(ii) Sei $H \leq G$ ein Untergruppe einer topologischen Gruppe. Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung in die Menge der Rechtsnebenklassen $G \to G/H$ offen is.

(iii) Sei $Y \subset X$ ein Teilraum eines topologischen Raumes. Zeigen Sie, dass das die Produkttopologie auf $Y \times Y$ mit der Teilraumtopologie von $Y \times Y \subset X \times X$ übereinstimmt.

Aufgabe 4 [4 Punkte].

Sei $G = \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ die Gruppe aller bijectionen von $\mathbb{N}$. Es gibt zwei natürliche Topologien auf G:

- G trägt die gröbste Topologie, die G zu einer topologischen Gruppe macht und für die alle Punktstabilisatoren $G_i = \{g \in G \mid gi = i\}$ zu offenen Untergruppen von G werden.
- G trägt die Topologie der punktweisen Konvergenz, d.h. eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $g \in G$ genau dann wenn für all $i \in \mathbb{N}$ Konvergenz $g_n i \to gi$ vorliegt.

(i) Zeigen Sie, dass die beiden angegeben Topologien auf G übereinstimmen.

(ii) Zeigen Sie, dass das neutrale Element in G eine Umgebungsbasis besitzt, die aus offenen Untergruppen von G besteht.