Aufgaben zur Abstrakten harmonischen Analysis

Blatt 3
SS 2016
Abgabe: 28.04.16 14:15 Uhr in der Übungsgruppe

Søren Knudby
Sven Raum

Aufgabe 1 [4 Punkte].
Sei G eine topologische Gruppe und V ein Banachraum. Zeigen Sie, dass ein Gruppenhomomorphismus $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ genau dann eine Darstellung von G definiert, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind.

- Die Operation von G auf V is punktweise stetig, d.h. für jedes $v \in V$ ist die Abbildung $G \ni g \mapsto \pi(g)v \in V$ stetig.
- Die Abbildung $G \to R_{>0} : g \mapsto \|\pi(g)\|$ is lokal beschränkt, d.h. für jedes element $g \in G$ gibt es eine Umgebung U von g, so dass $U \ni h \mapsto \|\pi(h)\|$ beschränkt ist.

Aufgabe 2 [4 Punkte].

Zeigen Sie, dass die gewöhnliche Multiplikation $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ eine Darstellung von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^n$ definiert, die nicht unitarisierbar ist.

Aufgabe 3 [4 Punkte].

Zeigen Sie, dass die natürliche Darstellung von $\mathcal{U}(n)$ auf $\mathbb{C}^n$ irreduzibel ist.

Aufgabe 4 [4 Punkte].

Sei G eine Hausdorff Gruppe. Zeigen Sie, dass jede lokal kompakte Untergruppe $H \leq G$ abgeschlossen ist.
Hinweis: benutzen Sie die Tatsache, dass jede kompakte Teilmenge eines Hausdorff Raumes abgeschlossen ist.