Aufgaben zur Abstrakten harmonischen Analysis

Blatt 4
SS 2016
Abgabe: 09.05.16 16:15 Uhr in der Vorlesung

Søren Knudby
Sven Raum

Aufgabe 1 [4 Punkte].

Sei X ein lokal kompakter Hausdorff Raum und μ ein Borelmaß auf X. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(i) Das Maß μ is lokal endlich, d.h. jedes $x \in X$ besitzt eine Umgebung U, so dass $\mu(U) < \infty$.

(ii) Das Maß μ ist endlich auf kompakten Mengen, d.h. jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ erfüllt $\mu(K) < \infty$.

Aufgabe 2 [4 Punkte].

Die Multiplikation mit 2 ist ein stetiger Gruppenautomorphismus von $\mathbb{R}$. Betrachten Sie das semidirekte Produkt $G = \mathbb{R} \rtimes_{\cdot 2} \mathbb{Z}$. Es trägt die eindeutige Gruppentopologie, die $\mathbb{R} \leq \mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}$ zur offenen Untergruppe macht.

(i) Berechnen Sie das Haar Maß von G.

(ii) Berechnen Sie die Modularfunktion von G.

Aufgabe 3 [4 Punkte].

Sei X ein lokal kompakter Hausdorff Raum und μ ein Radonmaß auf X.

(i) Sei N die Vereinigung aller offenen Mengen $U \subset X$, die $\mu(U) = 0$ erfüllen. Zeigen Sie, dass $\mu(N) = 0$ gilt. Das Komplement $X \setminus N = \operatorname{supp}(\mu)$ wird als der Träger von μ bezeichnet.

(ii) Zeigen Sie, dass $x \in \operatorname{supp}(\mu)$ genau dann wenn $\int_X f \mathrm{d}\mu > 0$ für jedes stetige $f : X \to [0,1]$ mit kompakten Träger und $f(x) > 0$ gilt.

(iii) Sei mit δ_x, $x \in X$ das Dirac-Maß bezeichnet. Zeigen Sie, dass $\operatorname{supp}(\mu) = \{x\}$ genau dann gilt, wenn $\mu = c\delta_x$ für ein $c > 0$.

Aufgabe 4 [4 Punkte].

Sei G eine lokal kompakte Gruppe mit Haarmaß μ. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Eine offene Untergruppe von G ist auch abgeschlossen.

(ii) G besitzt eine σ-kompakte offene Untergruppe.

(iii) Wenn G zusammenhängend ist, so ist G σ-kompakt.

(iv) G is genau dann σ-kompakt, wenn μ σ-endlich ist.