Aufgaben zur Abstrakten harmonischen Analysis

Blatt 7
SS 2016
Abgabe: 02.06.16 14:15 Uhr in der Übungsgruppe

Søren Knudby
Sven Raum

Aufgabe 1 [4 Punkte].
Sei H ein Hilbertraum. Bezeichne $\mathcal{B}(H)^{\mathrm{opp}}$ die C*-algebra $\mathcal{B}(H)$ mit umgekehrter Multiplikation: $A^{\mathrm{opp}}B^{\mathrm{opp}} = (BA)^{\mathrm{opp}}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Formel $(A \otimes B^{\mathrm{opp}})T = ATB$ einen *-Homomorphismus $\mathcal{B}(H) \otimes_{\mathrm{alg}} \mathcal{B}(H)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{B}(\mathcal{HS}(H))$ definiert. Dieser *-Homomorphismus wird als Links-Rechtsoperation von $\mathcal{B}(H)$ auf $\mathcal{HS}(H)$ bezeichnet.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(H)$ von rechts auf dem konjugierten Hilbertraum $\overline{H}$ durch $B^{\mathrm{opp}}\overline{\eta} = \overline{B^*\eta}$ operiert. Schließen Sie, dass es eine Links-Rechtsoperation von $\mathcal{B}(H)$ auf $H \otimes \overline{H}$ gibt, die $(A \otimes B^{\mathrm{opp}})(\xi \otimes \overline{\eta}) = A\xi \otimes \overline{B^*\eta}$ erfüllt.

(iii) Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus $H \otimes \overline{H} \to \mathcal{HS}(H)$ gibt, der die Links-Rechtsoperationen von $\mathcal{B}(H)$ konjugiert.

Aufgabe 2 [4 Punkte].

Sei X lokal kompakter Raum und μ ein Radon Maß auf X. Sei $k : X \times X \to \mathbb{C}$ ein 2-integrierbar Kern und $K : \mathrm{L}^2(X, \mu) \to \mathrm{L}^2(X, \mu)$ der Hilbert-Schmidt Integraloperator mit Kern k. Zeigen Sie, dass der adjungierte Operator K^* ein Hilbert-Schmidt Integraloperator ist und bestimmen Sie seinen Kern.

Aufgabe 3 [4 Punkte].

Sei H ein Hilbertraum und Tr die Spur auf $\mathcal{B}(H)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tr}(|T|) = \mathrm{Tr}(|T^*|)$ für jeden Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ gilt.

Aufgabe 4 [4 Punkte].

Sei H ein Hilbertraum und $\mathcal{T}(H) := \{T \in \mathcal{B}(H) \,|\, \mathrm{Tr}(|T|) < \infty\}$ die Menge der sogenanten Spurklasse-Operatoren.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}(H)$ ein *-Ideal in $\mathcal{B}(H)$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}(H) \subset \mathcal{HS}(H)$ gilt.

Sie können hierzu Aufgabe 3 vorraussetzen und die folgende Ungleichung für positive Operatoren auf einem Hilbertraum verwernden: wenn $S, T \in \mathcal{B}(H)^+$ und $S \leq T$, so gilt $S^{1/2} \leq T^{1/2}$.