Aufgaben zur Abstrakten harmonischen Analysis

Blatt 8
SS 2016
Abgabe: 09.06.16 14:15 Uhr in der Übungsgruppe

Søren Knudby
Sven Raum

Aufgabe 1 [4 Punkte].
Sei K eine kompakte Gruppe und π endlich dimensionale unitäre Darstellung von K. Zeigen Sie, dass $\chi_{\overline{\pi}} = \overline{\chi_\pi}$ gilt.

Aufgabe 2 [4 Punkte].

Sei K kompakte Gruppe und π, ν endlich dimensionale unitäre Darstellungen von K. Zeigen Sie, dass $\chi_{\pi \otimes \nu} = \chi_\pi \chi_\nu$ gilt.

Aufgabe 3 [4 Punkte].

Eine unitäre Darstellung π einer lokal kompakten Gruppe heißt selbst-konjugiert, falls $\overline{\pi} \cong \pi$ gilt. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für eine unitäre Dastellung (π, H) von G äquivalent sind.

(i) π is selbst-konjugiert.

(ii) Es existiert ein reeler Hilbertteilraum $H_\mathbb{R} \subset H$, so dass $H = H_\mathbb{R} \oplus iH_\mathbb{R}$ und $\pi(g)H_\mathbb{R} = H_\mathbb{R}$ für all $g \in G$ gilt.

Folgern Sie, dass eine endlich dimensionale Darstellung π einer kompakten Gruppe genau dann selbst-konjugiert ist, wenn ihr Charakter nur reele Werte annimmt.

Aufgabe 4 [4 Punkte].

Seien K und L kompakte Gruppen. Für irreduzible unitäre Darstellungen $\pi \in \hat{K}$ und $\nu \in \hat{L}$ definiere die unitäre Darstellung $\pi \times \nu$ von $K \times L$ auf $H_\pi \otimes H_\nu$ durch $(\pi \times \nu)(x, y) := \pi(x) \otimes \nu(y)$.

- Zeigen Sie, dass die Darstellung $\pi \times \nu$ wohl-definiert und irreduzibel ist.
- Zeigen Sie, dass jede irreduzible Darstellung von $K \times L$ von der Form $\pi \times \nu$ für $\pi \in \hat{K}$ und $\nu \in \hat{L}$ ist.