Ankündigung: Von Neumann Algebren und messbare Gruppentheorie [1]

Sven Raum

Vorlesungszeitpunkt. Mittowochs 10-12 Uhr (c.t.)
Hörsaal. M4
Kontakt. Sven.Raum@gmail.com
Website. www.raum-brothers.eu/sven unter "Teaching"

Zusammenfassung

Diese Vorlesung wird zwei Themen behandeln. Einerseits betrachten wir von Neumann Algebren, also unital *-Unteralgeben $M \subset \mathcal{B}(H)$ der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum, die in der Topologie der Punktweisen Konvergenz abgeschlossen sind. Andereseits wird messbare Gruppentheorie, also das Studium (diskreter) Gruppen durch ihre Wirkungen auf Wahrscheinlichkeitsräumen, eine wichtige Rolle in der Vorlesung spielen. Die Verbindung zwischen diesen Themen wird durch das von Neumann algebraische verschränkte Produkt hergestellt. Ist nämlich Γ eine discrete Gruppe, die auf einem (Standard-)Wahrscheinlichkeitsraum (X, μ) operiert, so können wir eine von Neumann Algebra $\mathrm{L}^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ definieren. Es stellt sich heraus, dass diese von Neumann Algebra in einigen Fällen noch sehr viele Informationen über die Operation $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ enthält. Das folgende erst in 2013 bewiese Resultat gibt eine erste Idee von der Art der erzielbaren Resultate. In der Vorlesung werden alle verwendeten Begriffe eingeführt und erklärt.

Satz. *Seien $\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_m$ zwei freie Gruppen und $\mathbb{F}_n \curvearrowright (X, \mu)$, $\mathbb{F}_m \curvearrowright (Y, \nu)$ freie, ergodische und wahrscheinlichkeitsmaßbewarende Operationen. Sind die verschränkten Produkte $\mathrm{L}^\infty(X, \mu) \rtimes \mathbb{F}_n \cong \mathrm{L}^\infty(Y, \nu) \rtimes \mathbb{F}_m$ isomorph, so folgt schon $m = n$.*

Dieses Resultat wird dadurch bewiesen, dass Inklusionen $\mathrm{L}^\infty(X, \mu) \subset \mathrm{L}^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ (wir benutzen die obenstehende Notation) studiert werden. Wir geben eine abstrakte Characterisierung solcher Inklusionen (geläufig unter dem Namen Cartan Unteralgebren) und beweisen, dass unter sehr allgemeinen Vorraussetzungen $\mathrm{L}^\infty(X, \mu)$ die (bis auf unitäre Konjugation) einzige Cartan Unteralgebra von $\mathrm{L}^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ ist. Dieses Resultat führt uns direkt in die messbare Gruppentheorie, denn Cartan-Inklusionen (das heißt die Inkusion einer Cartan Unteralgebra in eine von Neumann algebra) könnnen in ihrem Rahmen durch messbare Äquivalenzrelationen auf sehr viel elementarere Weiße beschrieben werden. Nach Einführung von Invarianten für derartige Äquivalenzrelationen, können wir das oben beschriebene Resultat ableiten.

Ziele. Diese Veranstaltung hat zwei Ziele. Erstens sollen Zuhöhrer mit den oben beschriebenen Themen vertraut gemacht werden, so dass eine Masterarbeit in diesen oder angrenzenden Gebieten bearbeitet werden kann. Zweitens richtet sich diese Vorlesung auch an Publikum mit einem Hintergrund in C*-Algebren, das sich für die eigene Forschung mit von Neumann algebraischen Techniken auseinandersetzen will. Dabei sei darauf hingewiesen, dass in den letzten Jahren klassische Resultate zu von Neumann Algebren einen nicht zu übersehenden Einfluss auf Forschung über C*-Algebren hatten.

[1] last modified October 21, 2015

Weitere Informationen

- Diese Vorlesung wir zweistündig und ohne Übungsgruppen gehalten. Da aber eigenständiges Arbeiten unerlässlich für das Fortkommen in der Mathematik ist, werde ich regelmässig Fragen und Übungen anführen. Sollten Fragen oder Probleme beim Lösen auftreten, können wir diese individuell oder bei Bedarf in kleinen Gruppen außerhalb der Vorlesung besprechen.
- Sollten Teilnehmer den Wunsch haben im Bereich der von Neumann Algebren oder der messbaren Gruppentheorie eine Masterarbeit zu schreiben, so stehe ich als Betreuer zur Verfügung.

Sven Raum
Westfälische Wilhelmsuniversität Münster
Fakultät Mathematik und Informatik
Einsteinstraße 62
D-48149 Münster
Germany
sven.raum@gmail.com